

Wolfgang Wildgen und Peter Jörg Plath

Katastrophen- und Chaostheorie in der linguistischen Modellbildung*

1. Was sind dynamische Systeme?
2. Grundideen und Grundbegriffe der Katastrophentheorie
3. Generalisierte Katastrophen und Bifurkationsdynamik
4. Kreisprozesse, Chaos und fraktale Strukturen
5. Linguistische Anwendungen
 - 5.1. Phoneme und Silben
 - 5.2. Wörter
 - 5.3. Sätze
 - 5.4. Prozesse des Sprachwandels
 - 5.5. Weitere Anwendungen
6. Schluss

Die mathematische Linguistik hat sich unter dem Einfluss der analytischen Philosophie und der Entwicklung symbolverarbeitender Computer seit den 50er Jahren intensiv mit logischen und algebraischen Modellen befasst. Das symbolisch-komputationale Paradigma ging davon aus, dass die kognitiven oder sozialen Kontexte für die Symbolverarbeitung irrelevant seien. Es ging im Wesentlichen darum, ein abstraktes System zu konstruieren, dieses konnte dann in beliebige Kontexte eingebettet werden. Die kognitive Wende (seit den 70er Jahren) veränderte die Situation. Die

* Erscheint 2004/05 in: Internationales Handbuch der quantitativen Linguistik, de Gruyter, Berlin.

natürliche Organisation eines kognitiven Systems, speziell des Gehirns, bestimmt auch, welche Art von Systemorganisation geeignet ist. Stellt man die Semantik ins Zentrum (wie in der generativen Semantik und der kognitiven Semantik), so sind die Topologie des Raumes (des Leibes) und die Dynamik der Gegenstände, besonders aber die Handlungsszenarien, von zentraler Bedeutung. Damit rücken als mathematische Subdisziplinen, die Topologie, die Analysis und genereller die Theorie dynamischer Systeme in den Blickpunkt der mathematischen Linguistik. Konsequenter hat diese René Thom gefordert und exemplarisch ausgeführt (ab 1972).

Inzwischen sind nicht nur seine Anregungen vielfach aufgegriffen und weiterentwickelt worden (vgl. Wildgen 1982, 1985, 1994, 1999a) auch das mathematische Gebiet und dessen Anwendungen haben klarere Konturen gewonnen. Dabei sind insbesondere die Allgemeine Bifurkationstheorie (generalisierte Katastrophentheorie) und die Chaostheorie von Interesse. Wir werden diese Gebiete in ihren wichtigsten Eigenschaften darstellen und dann Anwendungspotentiale in der Linguistik skizzieren. Die statistische Dynamik (Synergetik von Haken, Theorie dissipativer Strukturen von Prigogine) muss an anderer Stelle behandelt werden, obwohl eine Reihe hier beschriebener dynamischer Grundprinzipien auch dort relevant sind.

1. Was sind dynamische Systeme?

Die Entwicklung des Hauptstrangs der theoretischen Linguistik seit etwa 1950 hat drei Tabus eingeführt. Linguistische Modelle sind demnach

- diskret (und nicht kontinuierlich)
- linear (nichtlineare Systeme kommen nicht in Betracht)
- deterministisch (statistische Überlegungen und Systemarchitekturen werden marginalisiert).

Die dynamischen Systeme, welche wir als Kandidaten für linguistische Modellstrukturen vorstellen, sind dagegen:

- (a) Die Alternative *kontinuierlich* oder *diskret* betrifft in erster Linie das Beschreibungsverfahren, nicht die Systeme selbst. Wenn der Übergang zu diskreten Phänomenen oder das Grenzverhalten und die Stabilität der "diskreten" Größen das Problem sind, ist es günstig von einer kontinuierlichen Beschreibung auszugehen. Die Stabilitätstheorie und die Katastrophentheorie gehen diesen Weg und können somit zu einer Theorie der Kategorisierung beitragen.
- (b) Explanativ sind *nichtlineare* dynamische Systeme höher zu bewerten, da sie den Zusammenhang von Struktur, Strukturgenese und die Prozesse der Selbstorganisation bzw. Selbststabilisierung mit erfassen. Unter speziellen Randbedingungen kann das Verhalten des Systems mit einem linearen dynamischen System approximiert werden.
- (c) In allen Systemen sind *Fluktuationen*, stochastische Schwankungen in Rechnung zu stellen; bei gewissen Prozessen (in der Nähe der Instabilität) können diese Fluktuationen sogar strukturbildend werden. Bei der Systemkonstruktion kann dennoch eine deterministische Modellbildung bevorzugt werden. Die synergetischen Modelle beinhalten deterministische und stochastische Konzepte, wobei das deterministische Chaos (vgl. Abschnitt 4) einen Grenzfall deterministischer Systeme mit sehr irregulärem (nicht periodischem) Verhalten darstellt.

Wir wollen die Skala der Systemkandidaten kurz darstellen. Sie geht von der zentralen Eigenschaft, nämlich der Dynamik, aus:

Eine extrem komplizierte Vorstellung der Dynamik finden wir bei Laplace (1749-1827). Seine "Weltlinien" legen für bestimmte Startbedingungen den Lauf (die "Trajektorie") der Welt fest. Diese werden beschrieben durch ein System von Differentialgleichungen, welche von der Zeit, von den Raumvariablen und von zeit- und raumabhängigen Kontrollparametern abhängig sind. Durch eine sukzessive Typisierung der Prozesse erhalten die Systeme eine mathematische Form, die eine erfolversprechende

Handhabung ermöglicht. Mögliche Stufen dieser Reduktion sind (vgl. Gilmore 1980, 3 f.):

- 1) Das dynamische System wird durch eine Menge partieller Differentialgleichungen (ohne Integrale) ausgedrückt.
- 2) Es gibt nur Zeitableitungen erster Ordnung, und es werden die Nullstellen dieses Systems betrachtet. Wir wollen nur solche Systeme betrachten, bei denen Zeitableitungen 1. Ordnung vorkommen, und nennen diese *dynamische Systeme*.
- 3) Wenn wir die Abhängigkeit von der realen Zeit eliminieren, so erhalten wir *autonome dynamische Systeme*.
- 4) Die in Abschnitt 2 und 3 betrachteten Funktionen sind annähernd wie Kräftefunktionen (Potentiale) zu behandeln. In diesem Falle sprechen wir von *Gradientensystemen*. Die Minima oder die *Attraktoren* des Systems bestimmen die Typologie der betrachteten Vorgänge. In Gradientensystemen können wir zwei Typen von Prozessen unterscheiden: Die Kontrolle des Punktes (oder anschaulicher der Kugel) in der epigenetischen Landschaft: die *schnelle* Dynamik. Diese ist durch das Vektorfeld und die Vektorflüsse definiert (vgl. Abschnitt 2). Die Veränderung der epigenetischen Landschaft in Abhängigkeit von externen Kontrollparametern: die *langsame* Dynamik.
- 5) In einer solchen Dynamik kann sich die Landschaft qualitativ oder auch nur quantitativ verändern. Qualitative Veränderungen betreffen den Typ von Extrema (Minima, Sattel, Maxima), ihre Anzahl und instabilen Gleichgewichtspunkte. Globale Systeme mit diesen Eigenschaften nennt man *Bifurkationssysteme*.
- 6) Werden Verzweigungen iteriert, erhält man ein sogenanntes Feigenbaum-Szenario, das zu den *chaotischen Systemen* überleitet. Diese Systeme werden in Abschnitt 4 : Kreisprozesse, Chaos und fraktale Strukturen behandelt.
- 7) In einem System von Bifurkationen (Verzweigungen) kann man ausschließlich die stabilen und instabilen Fixpunkte in Gradientensystemen und deren lokale

Umgebungen betrachten; diesen speziellen Fall behandelt die *Katastrophentheorie*, deren Grundbegriffe im folgenden Abschnitt eingeführt werden.

2. Grundideen und Grundbegriffe der Katastrophentheorie

Ausgangspunkt sind geometrische und topologische Grundbegriffe. Das geometrische Basisvokabular ist in Abbildung 1 dargestellt. Diese Basisobjekte könnten im Raum bewegt, verändert (deformiert) oder aufeinander abgebildet werden.

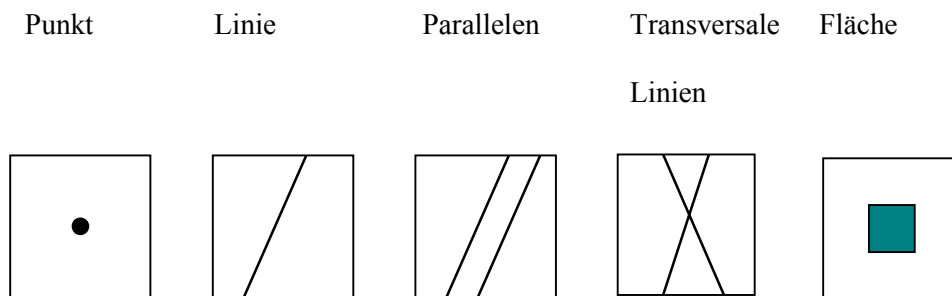


Abbildung 1: Das geometrische Basisvokabular.

Die Linie ist das erste interessantere Objekt; sie kann in eine Ebene (die z.B. durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben wird) eingebettet werden und durch eine lineare Gleichung beschrieben werden. Eine durch den 0-Punkt gehende diagonale Linie wird z.B. durch die Gleichung des Typs: $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$; $y = -x$, $y = -\frac{1}{2}x$ oder generell $Ax + By = 0$ beschrieben (dies ist ein 1-dimensionaler Unterraum). Wird die Linie im Koordinatensystem parallel verschoben, kommt eine Konstante C ins Spiel, etwa bei $C = 1$: $Ax + By = 1$; generell $Ax + By = C$ (man spricht auch von einem affinen Teilraum).

Jede gerade Linie kann in den Ursprung zurückversetzt werden, indem für C der Wert 0 gewählt wird; sie wird normalisiert.

Die charakteristische Eigenschaft der Geraden: ihre Steigung wird durch die erste Abteilung bestimmt, z.B. $y = \frac{1}{2}x$; $y' = \frac{1}{2}$. Die Komplexität der Linie kann gesteigert

werden, dabei ist der Exponent ein Maß dieser Komplexität; der Grad bestimmt sich durch den höchsten vorkommenden Exponenten:

Tabelle 1: Gleichungen ersten bis vierten Grades (Beispiele)

| | |
|----------------------------|--------------------------|
| $10x - 3y = 8$ | Gleichung ersten Grades |
| $x^2 + y^2 = 70$ | Gleichung zweiten Grades |
| $x^3 - y + x = 1$ | Gleichung dritten Grades |
| $x^4 + x^2y^2 + 15y^3 = 0$ | Gleichung vierten Grades |

Die Gleichungen zweiten Grades beschreiben klassische Kurven, wie den Kreis, die Ellipse, die Parabel, die Hyperbel. Die Gleichungen dritten Grades erlauben uns, eine wichtige qualitative Veränderung zu beobachten. Die allgemeine Gleichung lautet jetzt: $y = A(x^3 + Bx)$. Dabei ist B ein Faktor der qualitativen Bifurkation. Bei positivem B liegt keine kritische Stelle (Maximum, Minimum oder Sattel) vor; bei $B = 0$ gibt es einen Sattelpunkt (waagerechte Tangente) und bei $B < 0$ (negativ) entstehen ein Maximum und ein Minimum. Dies zeigt Abbildung 2.

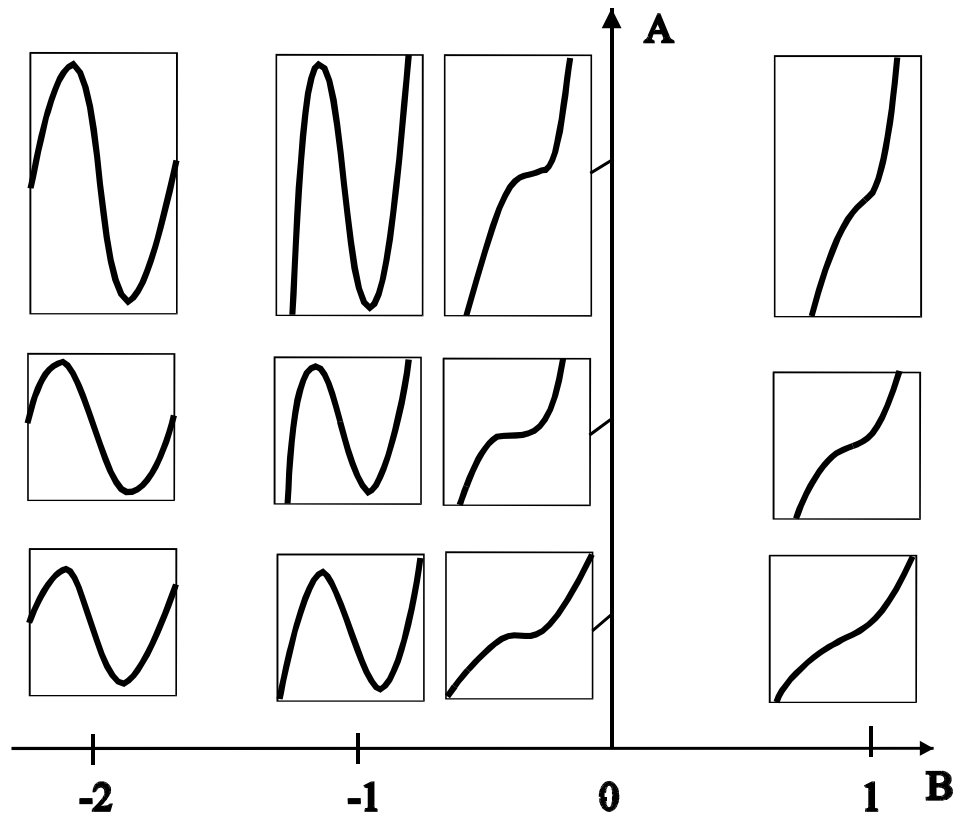


Abbildung 2: Die Formen der Parabel: $y = A(x^3 + Bx)$.

Wenn wir der Einfachheit halber $A = 1$ setzen und für B die Werte $+1, 0, -1$ betrachten, können wir die qualitative Veränderung auch rechnerisch erfassen (y' und y'' = die erste und zweite Ableitung von y):

$$y_1 = x^3 + x; y_1' = 3x^2 + 1; y_1'' = 6x \quad (B = +1)$$

$$y_2 = x^3; y_2' = 3x^2; y_2'' = 6x \quad (B = 0)$$

$$y_3 = x^3 - x; y_3' = 3x^2 - 1; y_3'' = 6x \quad (B = -1)$$

Die erste Ableitung soll an den kritischen Stellen gleich null (0) sein. Im ersten Fall erhalten wir: $3x^2 + 1 = 0; x^2 = -1/3; x = \pm\sqrt{-1/3};$ die Wurzel ist imaginär ($i = \sqrt{-1}$), d.h. $x = \pm 1/3 i$.

Im zweiten Fall ergibt sich: $3x^2 = 0; x^2 = 0; x = 0$.

Nur im dritten Fall haben wir reelle Wurzeln: $3x^2 - 1 = 0; 3x^2 = 1; x^2 = 1/3; x = \pm\sqrt{1/3}$

Setzen wir die Werte von x in die zweite Ableitung ein, erhalten wir den Typ der Extremstelle: eine positive Konstante für das Minimum, eine negative für das Maximum. Abbildung 3 zeigt die entsprechenden Graphen.

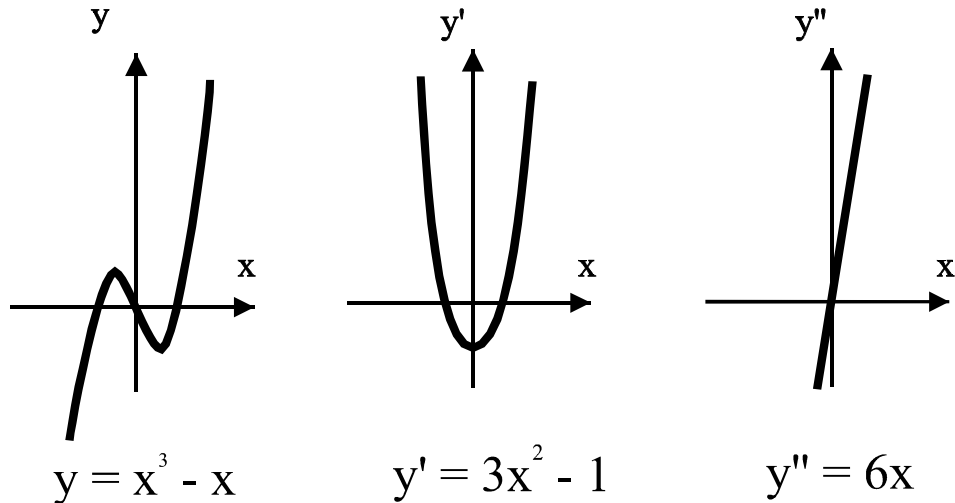


Abbildung 3: Die Graphen der Funktion $y^1 = x^3 - x$ und ihrer Ableitungen y' und y'' .

Diese einfachen Grundmuster sind dynamisch interpretierbar. So ergeben die Parabeln $y = x^2$ und $y = -x^2$ die Prototypen des Ruhepunktes (bei negativer Gradientendynamik) und der Instabilität. Sie sind mit dem Ruhepunkt und dem senkrechten Kipp-Punkt des Pendels vergleichbar, wobei die Ableitung nach t (der Zeit) erfolgt, d.h. $y = dx/dt$. Als klassisches Beschreibungsmittel der Kinematik dienen Vektoren und Vektorflüsse (orbits). Abbildung 4 zeigt die erste Ableitung für die positive Parabel $y = x^2$; $y' = 2x$, links als Graph in der (y', x) Ebene und rechts als Bündel von Vektoren, die sich in drei Klassen, Vektorflüsse: den 0-Vektor (im Minimum) und die positiven bzw. negativen Vektorflüsse unterteilen lassen.

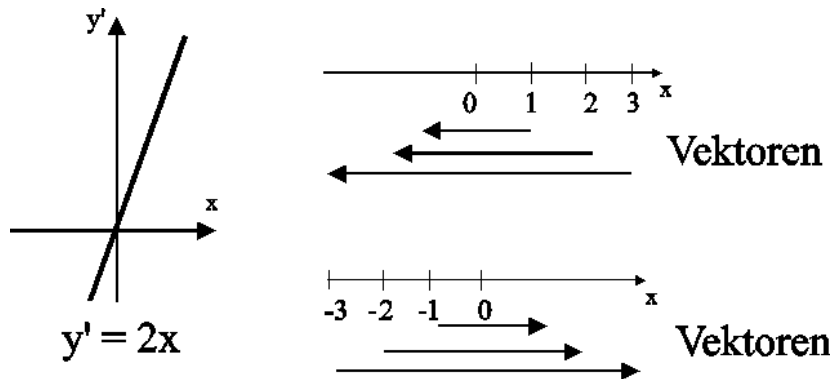


Abbildung 4: Die vektorielle Präsentation der Parabel.

An dieser Stelle kann der für die Katastrophentheorie wichtige Begriff der *strukturellen Stabilität* eingeführt werden. Die betrachteten Gleichungen, die nur die Basis einer großen Familie sind, werden *dynamische Systeme* genannt. Ein dynamisches System ist strukturell stabil, wenn kleine Störungen es *qualitativ* (bezogen auf Anzahl und Art der Extrema) nicht verändern. Die Störung lässt sich mathematisch als Addition einer Funktion z mit einer kleinen Konstante ε (oder rechnerisch einfacher auch 2ε) beschreiben. Für den einfachen Fall der quadratischen Parabel konnte Whitney die strukturelle Stabilität beweisen. Eine einfache Überlegung macht dies plausibel. Sei $y^* = y + z$ die gestörte Funktion y , so erhalten wir für $y = x^2$ und $z = 2\varepsilon x$; $y^* = x^2 + 2\varepsilon x$. Die erste Ableitung: $y^{*'} = 2x + 2\varepsilon$ ergibt als kritische Stelle: $2x + 2\varepsilon = 0$; $x = -\varepsilon$. Dies verschiebt lediglich die Funktion im Koordinatensystem, verändert diese aber nicht qualitativ (vgl. Abbildung 5).

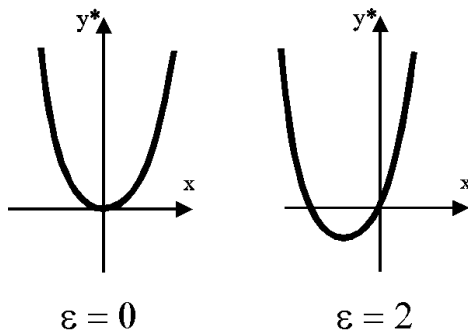


Abbildung 5: Die Deformation des Systems: $y = x^2$.

Wie schon die Variation der Konstanten B in $y = A(x^3 + Bx)$ (vgl. Abbildung 2) gezeigt hat, gilt die strukturelle Stabilität nicht mehr für die dynamische Systeme mit höherem Exponent. Anfang der 60er Jahre zeigten Thom und Mather, dass es jedoch Polynome, die sogenannten Entfaltungen dieser Systeme (die jetzt Keime heißen), gibt, die ihrerseits strukturell stabil sind (der Beweis ist allerdings nicht mehr so einfach wie oben). Die Entfaltung macht die einzelnen (nicht degenerierten) Extremwerte sichtbar, die im Keim quasi komprimiert sind. Die Grundliste der einfachen Entfaltungen ist in Tabelle 2 gegeben (vgl. Thom 1983 für die englische Übersetzung seiner Aufsätze in den siebziger Jahren).

Tabelle 2: Die elementaren Katastrophen (ohne duale Formen)

| Keim | Entfaltung | Name | Typ |
|-----------|--|------------------|-----|
| $V = x^3$ | $V = x^3 + ux$ | Falte | A2 |
| $V = x^4$ | $V = x^4 + ux^2 + vx$ | Kuspe | A3 |
| $V = x^5$ | $V = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$ | Schwalbenschwanz | A4 |
| $V = x^6$ | $V = x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$ | Schmetterling | A5 |
| $V = x^7$ | $V = x^7 + ux^5 + vx^4 + wx^3 + tx^2 + sx$ | Stern | A6 |

Viele Anwendungen der Katastrophentheorie (vgl. Woodcock/Davis 1991) arbeiten mit der *Kuspe* als Basis und stellen die realen Prozesse durch Konfigurationen von Wegen in der Bifurkationsmenge der Kuspe dar. Ich gebe die Berechnung der mathe-

matischen Eigenschaften dieses Systems stellvertretend für die Charakterisierung der übrigen elementaren Entfaltungen ausführlicher an. Der Keim (instabiles dynamisches System) hat das Potential (d.h. die Ausgangsfunktion) $V = x^4$; zur Vereinfachung der rechnerischen Darstellung gehen wir von $x^4/4$ aus, da wir wissen, dass die Addition/Subtraktion oder Multiplikation/Division mit Konstanten qualitativ unerheblich ist.

Tabelle 3: Berechnung der Bifurkationsmenge (9) der Entfaltung der Kusppe (2)

| | |
|--|---|
| (1) Potential-Funktion | $V = x^4/4$ |
| (2) <i>Universelle Entfaltung</i> | $V = x^4/4 + ux^2/2 + vx$ |
| (3) Erste (partielle) Ableitung | $V' = x^3 + ux + v$ |
| (4) <i>Katastrophenmenge</i> (Nullstellen der 1. Ableitung) | $V' = x^3 + ux + v = 0$ |
| (5) Zweite (partielle) Ableitung | $V'' = 3x^2 + u$ |
| (6) Sattel (Nullstellen der 2. Ableitung) | $3x^2 + u = 0; x^2 = -u/3$ |
| (7) Das Ergebnis von 6 wird in 4 eingesetzt | $x^3 + ux + v = 0; x(x^2 + u) = -v;$ $x(-u/3 + u) = -v; x(2/3 u) = -v$ |
| (8) Die Gleichung (7) wird quadriert | $x^2(2/3u)^2 = v^2$ |
| (9) Der Wert für x^2 in (6) wird erneut eingesetzt; <i>Bifurkationsmenge</i> | $(-u/3) (2/3 u)^2 = -4u^3/27 = v^2$ $27v^2 + 4u^3 = 0$ |

Die Entfaltung hat vier Größen (V, x, u, v), ist also ein Körper im vierdimensionalen Raum; wir müssen diese Figur aus zweidimensionalen Bildern zusammenstellen. Abbildung 6 zeigt die Ebene (x, u) nach Gleichung (5) und die Ebene (u, v) nach Gleichung (9).

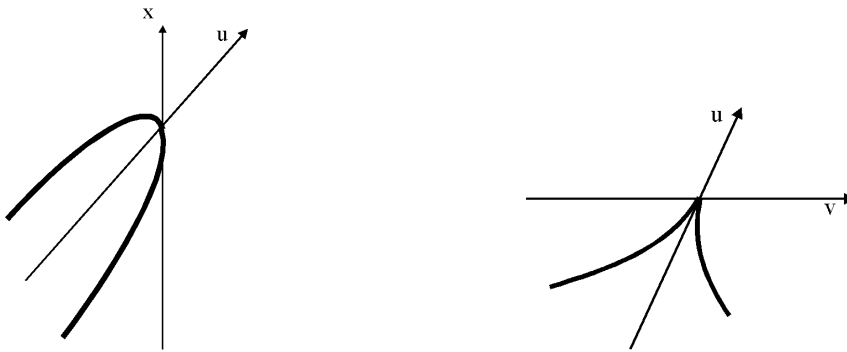


Abbildung 6: Die Graphen der Gleichung (5) links und (9) rechts.

Die semi-kubische Parabel: $27v^2 + 4u^3 = 0$ ist die *Bifurkationsmenge* mit den Kontrollvariablen u, v ; sie enthält die qualitativ wichtigste Information, denn bei Überschreiten der Linien verändert sich die Potentiallandschaft qualitativ. Wenn wir einzelnen Punkten im (u, v) -Raum Bilder der Funktion (V, x) anheften, ergibt sich die Darstellung in Abbildung 7.

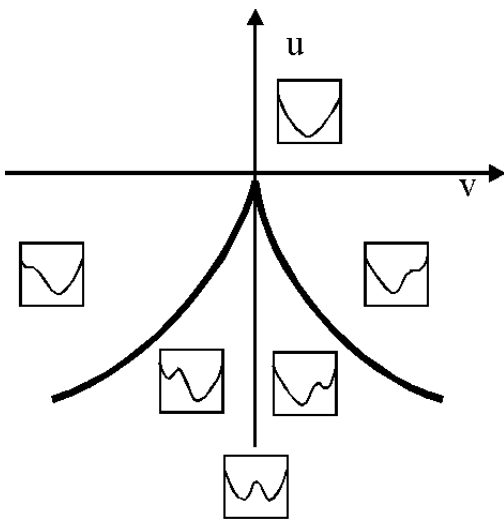


Abbildung 7: Der Graph der Potentiale von Gleichung (2) in der Ebene, die in Gleichung (9) beschrieben ist.

Generelle Eigenschaften der Kusp sind:

- Bimodalität. Es gibt zwei im mittleren Bereich der Kusppe konkurrierende Minima.
- Divergenz. Wenn das betrachtete System sich nahe dem Kuspnpunkt ($u=v=0$) in Richtung abnehmender u -Werte bewegt, kommt es entweder zu einer Stabilisierung im linken oder im rechten Minimum.

Wenn das Verhalten eines realen Systems, bimodale Polarität, Divergenz und eventuell noch Hysteresis als globale Eigenschaften zeigt, so ist die Kusppe eine naheliegende Modellhypothese.

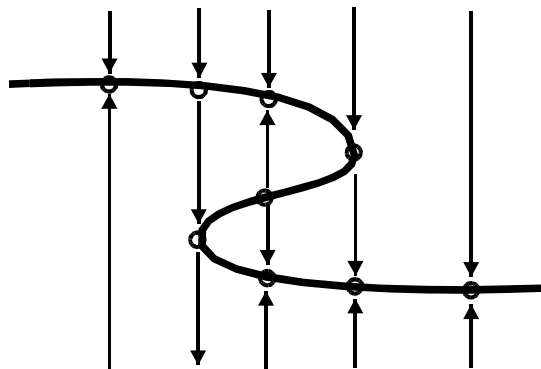
3. Generalisierte Katastrophen und Bifurkationsdynamik

"Bifurkationen" bezeichneten zuerst die Aufspaltung von Wegen, dann die Verzweigung von Blutbahnen in der Medizin. Poincaré hat 1884 in einer Abhandlung „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation“ (Über das Gleichgewicht einer flüssigen Masse, die durch eine Rotationsbewegung animiert ist; Übers. W.W.) den Begriff „forme de bifurcation“ (Bifurkationsform) eingeführt. Ihn interessierte im Kontext seiner Arbeit die Evolution von Gleichgewichten in der Ebene und Punkte, an denen mehrere Singularitäten zusammenstoßen. In Thom (1977, 100-107) werden in dieser Tradition sehr allgemeine Szenarien für so genannte „generalisierte Katastrophen“ angegeben. Es kann z.B. eine auf viele Punkte verteilte Ausgangssituation wie bei einem Flusslauf durch Vereinigung in einem einfachen Attraktor (den großen Strom) gebündelt werden oder ein einfacher Attraktor kann sich verästelten und aus einer Linie wird ein dichtes Netz. Der Blutkreislauf in seinem Übergang zu den Kapillaren ist eine biologische Realisierung dieser Morphologie. Schließlich können verschiedene Katastrophen sich überlagern oder ein Punkttattraktor wird zum Kreis, zum Torus „aufgebläht“ usw., d.h. die Dimension des Raumes, in den man den Attraktor einbettet, steigt jeweils um eins (Punkt: $d = 0$; Kreis: $d = 2$; Torus; $d = 3$). Man spricht in diesem Fall von Hopf-Bifurkationen. Die Wiederholung (Iteration)

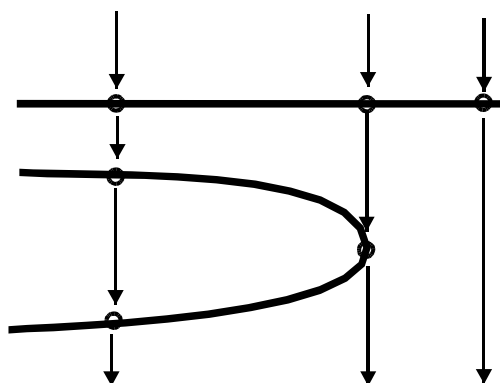
einer Bifurkation kann in den Bereich der Fraktale und des Chaos (vgl. Kap. 4) führen. Ein grundlegender Fall der Bifurkationsdynamik liegt vor, wenn wir in einer elementaren Entfaltung Wege betrachten und diese klassifizieren.

Die Elementarkatastrophen mit ihrer schnellen Dynamik der Stabilisierung (im Raum $[V, x]$) und der langsamen Dynamik der Entfaltung (in der Kuspel im Raum $[u, v]$) stellen ein Lexikon möglicher stabiler und damit ‚überall‘, d.h. in beliebigen Kontexten auftretender Prozesse dar. Dabei müssen Konventionen zum Typ der Dynamik vorausgesetzt werden. Man kann eine konservative (perfect delay) oder eine heiße (thermodynamische oder Maxwell-)Dynamik als Grundlage wählen (vgl. für eine sehr ausführliche Behandlung dieses Problems der Klassifikation von Wegen in den Elementarkatastrophen Wildgen 1985).

Jede Elementarkatastrophe ist durch Vektorströme, die sich in Abhängigkeit von den Kontrollparametern verändern, charakterisiert. Betrachtet man die in Abbildung 8 dargestellten Fibern mit minimal drei, maximal sieben Vektorflüssen (orbits), so kann man die strukturellen Verhältnisse innerhalb der Entfaltung überschaubar darstellen.



Fünf Klassen von Vektorflüssen



Drei Klassen von Vektorflüssen

Abbildung 8: Veränderung der Vektorlandschaft entlang der Kontrollparameter v (oben) und u (unten) in der Kusppe.

Die qualitativen Eigenschaften der Elementarkatastrophen können durch Dynkin-Diagramme dargestellt werden, in denen die Vektorflüsse auf der x -Achse (oder in der x, y -Ebene) und der Typ der Singularität (Attraktor, Repellor) durch ein $+$, ein $-$ dargestellt werden. Da die Richtung der Vektorflüsse durch den Typ der Singularität festgelegt ist, kann man bei der Schematisierung auch auf die Richtungspfeile verzichten. Wir zeigen zuerst anhand der Entfaltung des sogenannten Schmetterlings, wie die Potentialkurve in ein Dynkin-Diagramm (mit Richtungen) umgesetzt wird, und geben dann für die Kusppe die Dynkin-Diagramme (ohne Richtungen) an. Der Keim des Schmetterlings und seine Entfaltung sind: $A_5 : V = x^6$, Entfaltung $V = x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$.

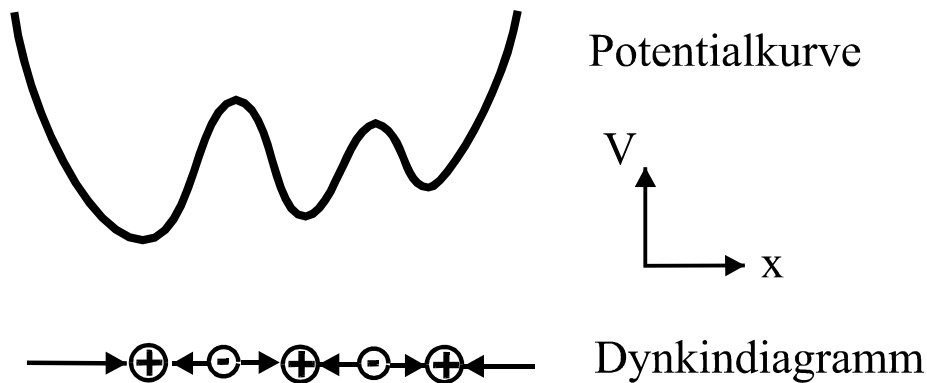


Abbildung 9: Die komplizierte Entfaltung des Potentials im Schmetterling (oben) und die Darstellung im Dynkin-Diagramm (unten)

Auf diese Weise können alle Elementarkatastrophen einfach charakterisiert werden. Abbildung 10 zeigt die jeweiligen maximalen Konstellationen der einzelnen Elementarkatastrophen (vgl. Tabelle2).

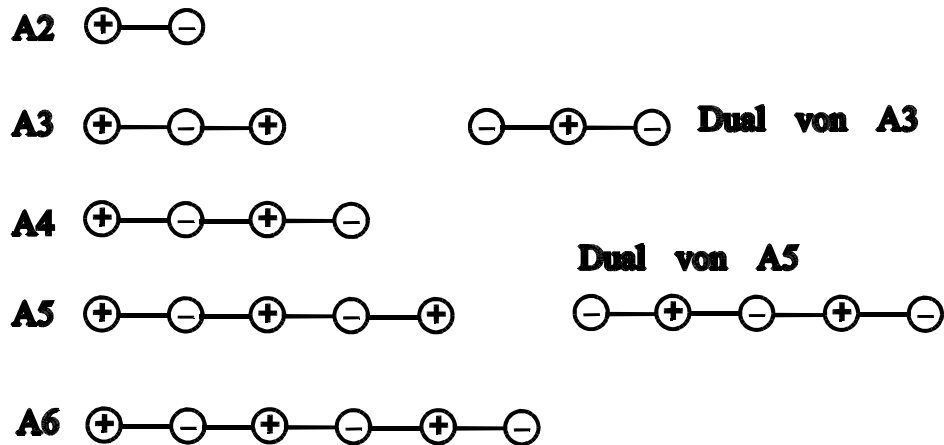


Abbildung 10: Die Dynkin-Diagramme einiger Elementarkatastrophen (Kuspide).

Eine schematischere Darstellung der Typen von Wegen erhalten wir nach dem Vorbild der „archetypischen Morphologien“ in Thom (1977, 312), wenn wir nur die Attraktoren, die Bifurkationsstellen und eventuell die „Katastrophensprünge“ von einem (dominanten) Attraktor zum anderen graphisch wiedergeben. Thoms Liste ist in Wildgen (1985, 108-226) überprüft und vervollständigt worden. Es soll hier nur das Konstruktionsprinzip erläutert werden. Nimmt man die in Abbildung 8 dargestellten Vektorfelder in der Entfaltung der Kuppe, vernachlässigt die Maxima (Repelloren) und markiert die Bifurkationspunkte durch Kreise, erhält man die Schemata, die Thom (1977, 312) „changer“ (wechseln) und „capturer“ (fangen) nennt. In Abbildung 11 werden sie so dargestellt, dass der Zusammenhang mit den Vektorfeldern in Abbildung 8 deutlich wird. Der Pfeil markiert den Sprung im Falle einer Maxwell-Dynamik (d.h. in das jeweils tiefere Minimum).

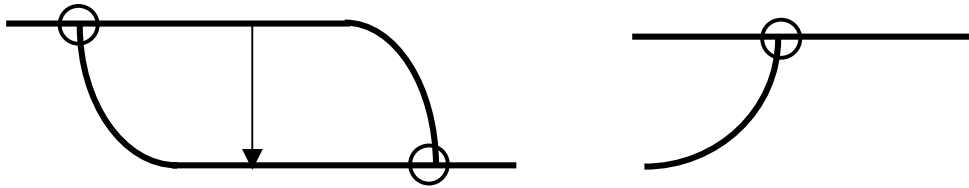


Abbildung 11: Die archetypischen Morphologien des "Wechsels" und des "Fangens".

Die Grenzen einer dynamischen Modellbildung, die lediglich Attraktoren und Repellenen betrachtet, werden deutlich, wenn die reale (z.B. die evolutionäre oder die historische) Zeit, individuelle Entwicklungen oder räumliche Verteilungen (etwa in der Dialektologie) Gegenstand der Analyse sind. Man muss nun zeitliche und räumliche Parameter in Rechnung stellen, Konvergenz und Divergenz, zyklische Attraktoren und fraktale Geometrien ins Auge fassen. Die erfolgt im folgenden Kapitel.

4. Kreisprozesse, Chaos und fraktale Strukturen

In vielen Fällen kann die Entwicklung eines Systems nicht nur mit Hilfe der Zeitabhängigkeit nur einer variablen Größe beschrieben werden. Aber auch dann, wenn mehrere, sich gegenseitig beeinflussende Größen zur Beschreibung der Dynamik eines Systems erforderlich sind, sind die in den voranstehenden Kapiteln erläuterten Grundbegriffe von zentraler Bedeutung, wenngleich sie sinnvoller Weise um einige weitere Begriffe ergänzt werden sollten.

Gehen wir einmal davon aus, dass die zeitliche Veränderung einer das System charakterisierenden Größe x beispielsweise durch die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + x + b \quad (1)$$

beschrieben wird, dann ist diese Veränderung – die „schnelle Dynamik“ des Systems - nur durch die eine unabhängige Variable x bestimmt. Stellt man nun $\frac{dx}{dt}$ als

Funktion dieser Variablen x dar (vgl. Abb. 12), dann erkennt man leicht, dass es sich

hierbei um die Ableitung V' eines Potentials handeln könnte. Wir kennen diese Funktion bereits aus den vorherigen Kapiteln.

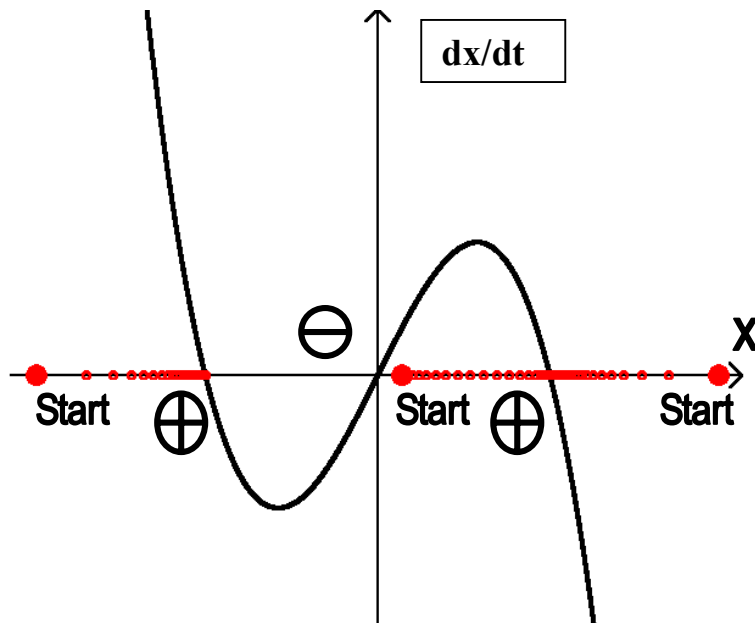


Abbildung 12 Diskrete Trajektorie im eindimensionalen Phasenraum der x-Achse. Die Differenz zwischen den Punkten gibt die Größe des Geschwindigkeitsvektors an, mit der das System, im jeweiligen Punkt sich befindend, zum nächsten Punkt des eindimensionalen Phasenraumes geht.

Die Nullstellen der kubischen Parabel sind die Punkte des Phasenraumes, denen sich das System in seiner schnellen Dynamik entweder nähert (+) – Punkte des Dynkin-Diagrammes oder aus denen es sich entfernt (-) – Punkte des Dynkin-Diagrammes.

Will man aber beispielsweise einen Kreisprozess beschreiben, so sind unbedingt mindestens zwei Variablen dazu erforderlich. Bei dem altbekannten Beispiel des idealen mechanischen Pendels sind es der Impuls $p = m\vec{v} = m \frac{dx}{dt}$ bzw. die Geschwindigkeit \vec{v} und die Auslenkung x des Pendels, die erst zusammen eine vollständige Beschreibung der Bewegung des Pendels ermöglichen. Die hierzu gehörige, gewöhnlich verwendete Differentialgleichung ist zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

Diese Gleichung kann, wie eingangs gefordert, leicht in ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \bar{v} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -kx \end{aligned} \quad (3)$$

Die beiden Variablen x und \bar{v} bzw. $\vec{p} = m\bar{v}$ spannen eine Ebene – den Phasenraum des Pendels – auf. Die Bewegung des Pendels verläuft dann entlang eines Kreises – mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Zentrum - in dieser Ebene (Abb. 13).

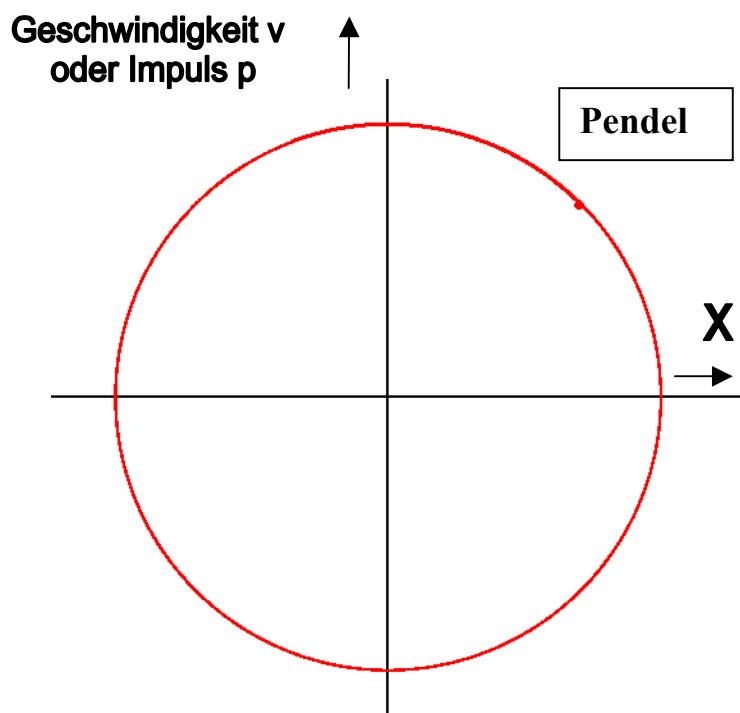


Abbildung 13 Kreis-Trajektorie des Pendels im Orts / Geschwindigkeits – Phasenraum

Nicht immer gestaltet sich die Beschreibung eines Zwei- oder Mehrvariablen-systems so einfach, wie im Fall des idealen Pendels. So hat Lotka bereits 1910 zur

Beschreibung eines dissipativen chemischen Systems mit Hilfe zweier abstrakter variabler Konzentrationen x und y das Gleichungssystem entwickelt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= H - kxy \\ \frac{dy}{dt} &= kxy - k_2y \end{aligned} \quad (4)$$

das einen zyklischen Prozess beschreibt, der aber nicht unbedingt kreisförmig abläuft und der vor allem nur mit positiven Größen beschrieben wird (vgl. Abb. 14). Dieses Gleichungssystem wurde in den 30er Jahren von Lotka (1931) auf biologische Probleme angewendet und fand daraufhin als Lotka - Volterra Modell vielfältigen Eingang in die Literatur, z.B. zur Beschreibung zyklischer, ökologischer Krisen. Ein Beispiel hierfür ist das 1982 von Ebeling herausgegebene Buch über die „Physik der Selbstorganisation und Evolution:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - axy \\ \frac{dy}{dt} &= kxy - by \end{aligned} \quad (5)$$

1972 benutzte Müller dieses Modell zur Beschreibung des wissenschaftlichen Schaffensprozesses und M. Peschel und W. Mende stellten 1983 gar die Frage: “Leben wir in einer Lotka - Volterra Welt?“

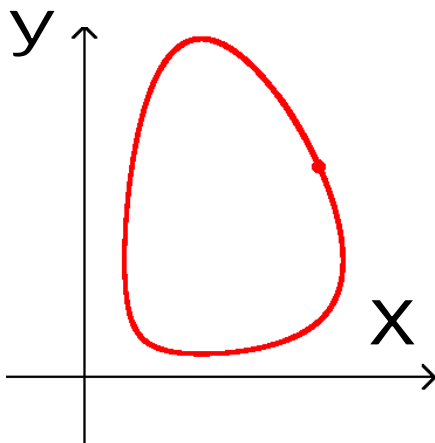


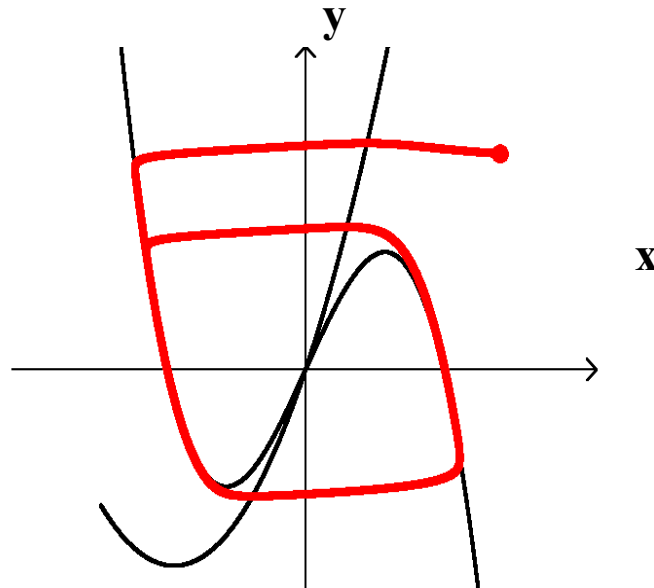
Abbildung 14: Eine zyklische Trajektorie des Lotka-Volterra Systems

Kombiniert man nun Differentialgleichungen höheren Grades, wie wir sie bereits kennen gelernt haben, beispielsweise zu dem einfachen System (6):

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{dt} &= -x^3 + ax - y; \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 + bx - c - y, \end{aligned} \quad (6)$$

$\varepsilon \ll 1$

Abbildung 14: Eine auf einen Grenzyklus einlaufende Trajektorie (rot, fett) und die zugehörigen Nullisoklinen.



so erhält man ebenfalls die Beschreibung eines zyklischen Prozesses, der aber - verglichen mit dem oben beschriebenen Kreisprozessen - eine ganz neue, interessante Eigenschaft aufweist. Wird dieser Kreisprozess nämlich gestört, so wird das System immer wieder auf den ursprünglichen Kreisprozess zurückkehren. Alle möglichen Wege - man nennt sie auch *Trajektorien* - im Phasenraum des Systems werden von diesem Zyklus angezogen. Er ist der *Attraktor* dieses Systems und wird, da er einen Zyklus darstellt, der für $t \rightarrow \infty$ angestrebt wird, auch *stabiler Grenzyklus* genannt. Dieser Grenzyklus ist vergleichbar mit dem stabilen stationären Punkten eines 1-dimensionalen Systems, die in den vorherigen Abschnitten ausführlich diskutiert wurden.

Man kann sich die Bewegung des Systems in seinem Phasenraum leicht veranschaulichen, indem man nach der *stationären Lösung* fragt. Hierzu setzt man beide Differentialgleichungen Null und erhält so ein algebraisches Gleichungssystem, das

aus den *Nullisoklinen* des Differentialgleichungssystems gebildet wird. Diese Nullisoklinen sind uns bereits bekannt (vgl. auch Abb. 15). Ändert man in der kubischen Gleichung z.B. den Parameter a des linearen Terms, so geht der Grenzyklus am *Bifurkationspunkt*, wenn $a < 0$ zu Null wird (d.h. für $a = 0$) in einen stabilen *Knotenpunkt* (*Fixpunkt*) für $a > 0$ über. Man nennt diese Art einer Bifurkation, bei der infolge der Variation des Bifurkationsparameters a ein Grenzyklus aus einem Knotenpunkt entsteht bzw. umgekehrt sich in diesen verwandelt, eine *Hopf-Bifurkation*.

Schneiden sich die beiden Nullisoklinen nicht zwischen den beiden Extremwerten der kubischen Parabel, sondern „links“ vom Minimum, aber nicht weit entfernt von ihm, so ist das System „*erregbar*“. Durch eine kleine externe oder interne Störung bzw. Fluktuation durchläuft das ganze System den Zyklus gerade einmal, um dann wieder in den stabilen, aber erregbaren Grundzustand – dem Schnittpunkt der beiden Nullisoklinen - zurückzukehren.

Das ist eine hochinteressante Eigenschaft dieses Systems, mit der man viele reale, erregbare Systeme gut beschreiben kann. Vor allem aber ist diese Erregbarkeit die Voraussetzung für die räumliche Ausbreitung von Erregungswellen, wie z.B. wandernden Pulsen.

Eine wirklich neue, vom *Grenzyklus*-, *Knoten*- oder *Sattelpunktsverhalten* abweichende Dynamik lässt sich erst im 3-dimensionalen kontinuierlichen Phasenraum beobachten, wenn mindestens drei Größen (Variablen) sich in ihrer zeitlichen Entwicklung gegenseitig beeinflussen.

Gehen wir zum besseren Verständnis wieder von der Beschreibung des idealen Pendels aus.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \tag{7}$$

und ergänzen dieses Gleichungssystem durch eine dritte Variable z beispielsweise in der von O.E. Rössler (1979) vorgeschlagenen Form:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= bx - cz + xz\end{aligned}\quad (8)$$

Die zeitliche Entwicklung von y ist nun durch den Term ay selbst abhängig von dem Wert ihrer eigenen Größe. Diese Abhängigkeit macht das System *dissipativ*, während das Pendel *konservativ* ist, da die zeitliche Entwicklung keiner der beiden Variablen von ihrem eigenen Wert abhängt. Diese Dissipation macht die zyklische Pendelbewegung instabil. Sie geht in einen auslaufenden Strudel über.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x - ay\end{aligned}\quad (9)$$

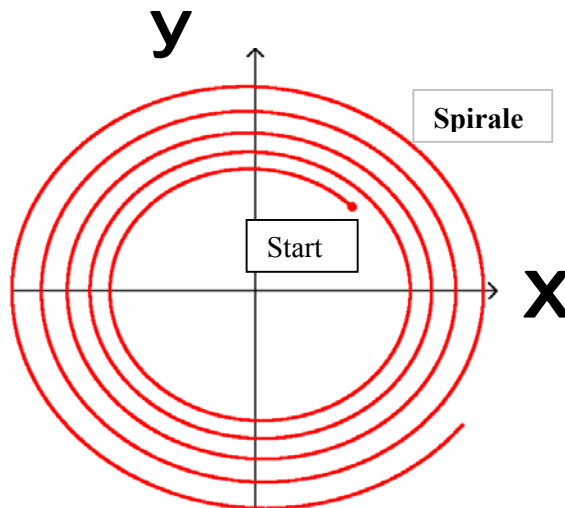


Abbildung 15: Auslaufende spiralförmige Trajektorie; Dynamik mit instabilem Strudelzentrum ($a = 0,04$). Dies entspricht einem aufschaukeln der Pendelbewegung bei negativer Dämpfung.

Die z -Nullisokline des Rösslerschen Systems hat die Form $z = \frac{-bx}{x-c}$. Die Größe

z wird nun in die zeitliche Entwicklung von x eingekoppelt; das System wird gewissermaßen in seine instabile Strudelbewegung reinjiziert (vgl. Abb. 17). Dabei entsteht eine chaotische Bewegung im Phasenraum.

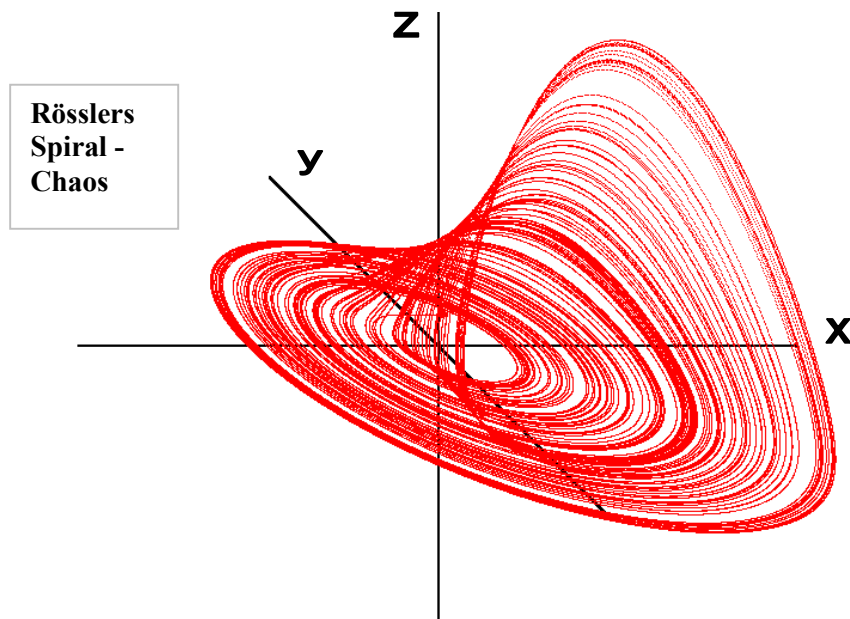


Abbildung 16: Rösslers Spiral - Chaos ($a = 0,035$; $b = 0,46$; $c = 4.5$)

Eine leichte Veränderung des soeben entwickelten dissipativen Gleichungssystems führt uns auf ein anderes, ebenfalls von Rössler (1979) entwickeltes Gleichungssystem, das sein *Reinjektionsprinzip* zur Erzeugung von Chaos besonders gut illustriert.

Der dissipative Term ax destabilisiert auch hier die zyklische Pendelbewegung und überführt sie in einen instabilen, auslaufenden Strudel. Der Term $-bz$ koppelt die z -Komponente in diesen Strudel ein, indem die z -Dynamik eine *Reinjektion* des Systems in sich erzeugt. Das System entfernt sich nun nicht mehr beliebig lange strudelnd von seinem Zentrum, sondern wird über die z -Dynamik wieder in die Nähe des Zentrums zurückgeworfen. Das System bewegt sich fast auf einer gefalteten Fläche (vgl. Abb. 18).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + ax - bz \\ \frac{dy}{dt} &= x + 1,1 \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= (1 - z^2)(x + z) - \varepsilon z\end{aligned}\tag{10}$$

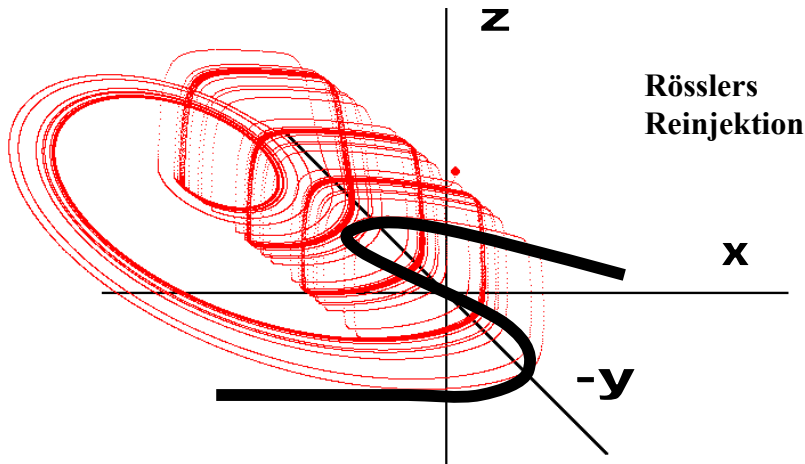


Abbildung 17: Reinjektion der Trajektorie über eine Falte (schwarz, fett skizziert) führt zu Rösslers Schrauben – Chaos ($a=0,5$, $b=5$)

Die Nullisokline $z = \frac{a}{b}(y^2 - y)$, die man für $\frac{dz}{dt} = 0$ erhält, ist eine Parabel.

Verfolgt man die zeitliche Entwicklung einer beliebigen Koordinate eines chaotischen Systems, so oszilliert sie, ohne dass dabei eine periodische Bewegung wie beim Pendel entsteht.

Das chaotische System ist völlig deterministisch und dennoch können wir keine langfristige Aussage über das zukünftige Verhalten des Systems machen. Es existiert nur eine kurzfristige Vorhersagbarkeit – ähnlich der Situation beim mitteleuropäischen Wetterverlauf. Bei der Beschreibung des Wetters stieß Lorenz 1963 erstmals auf Gleichungssysteme diesen Typs, die chaotisches Verhalten aufwiesen. Eine gut lesbare Darstellung des Lorenzsystems findet sich bei H.G. Schuster (1984).

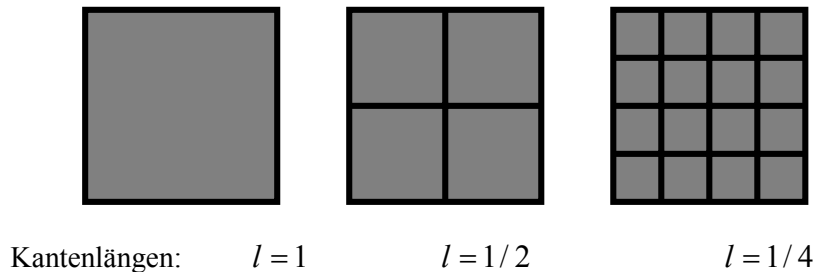
Die chaotische Bewegung stellt einen stabilen Attraktor dar, ähnlich wie der stabile Grenzzyklus und der stabile Knotenpunkt. Die chaotische Bewegung ist die für den dreidimensionalen, kontinuierlichen Phasenraum charakteristische Bewegung, die in

keinem kontinuierliche Phasenraum geringerer Dimension auftreten kann. Entsprechendes gilt für den *Grenzyklus* in 2-dimensionalen Phasenraum und die *Bistabilität* im 1-dimensionalen Phasenraum.

Die *chaotische Bewegung* ist aber wesentlich verschieden von einem Zufallsprozess. Man erkennt dies ganz deutlich, wenn man eine von Poincaré (1892), (vgl. auch Schuster 1984) entwickelten Methode benutzt, mit der man das komplizierte Geschehen im 3-dimensionalen Phasenraum auf einen 1-dimensionalen Raum abbildet (Poincaré – Abbildung). Dazu schneidet man den 3-dimensionalen Phasenraum in geeigneter Weise und betrachtet die Menge der Durchtrittspunkte der chaotischen Trajektorie durch diese Schnittebene (Poincaré – Schnitt). Dann nummeriert man die Durchtrittspunkte in der Folge ihrer Realisierung und trägt z.B. die x -Koordinate $x(N+1)$ des $(N+1)$ -ten Durchtrittspunktes als Funktion der x -Koordinate $x(N)$ des vorherigen, N -ten Durchtrittspunktes auf.

Die Poincaré - Abbildung führt auf eine Punktmenge, die eine diskrete Funktion darstellt. Dass es sich hierbei um eine Funktion handelt, ist der eindeutige Beleg dafür, dass es sich beim Chaos um einen deterministischen Prozess mit einer kleinen, aber immerhin noch vorhandenen Voraussagbarkeit des jeweils nächsten Ereignisses handelt. Sowohl die Punktmenge $\{x(N)\}$ wie auch die Funktion selbst stellen *fraktale Punktmenge* im lokal 1-dimensionalen Raum dar. Bereits 1883 hat Cantor (vgl auch Peitgen u.a. 1992) solche *fraktalen Punktmenge* untersucht. Eine fraktale Punktmenge, die in einen 1-dimensionalen Raum eingebettet ist, weist Bereiche größerer Punktdichte und Bereiche geringerer Punktdichte auf, ja sogar recht große Bereiche, in denen sich überhaupt keine Punkte befinden. Greift man nun einen Bereich mit einer beliebigen Punktmenge heraus, so findet man in ihm einen Bereich mit einer räumlichen Strukturierung, die der in ihm vorhandenen Punktmenge ähnlich ist. Man bezeichnet diese Eigenschaft als *Selbstähnlichkeit*. Objekte mit einer selbstähnlichen Struktur werden als *Fraktale* bezeichnet, wenn die Dimension, die man ihr zuordnen

kann, eine gebrochene rationale Zahl bzw. nicht ganzzahlig ist. Die fraktale Dimension ist kleiner als die kleinste topologische Dimension des Raumes, in dem dieses Objekt gerade noch *einbettbar* ist.



| n | l | $M(l)$ |
|-----|---------------------------------|------------|
| 0 | $1 = (\frac{1}{2})^0$ | $1 = 4^0$ |
| 1 | $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^1$ | $4 = 4^1$ |
| 2 | $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$ | $16 = 4^2$ |

$M(l)$ ist die Anzahl der schwarz gefüllten Quadrate der Kantenlänge l

Abbildung. 19 Selbstähnlicher Zerlegungsprozess eines vollständig „schwarz“ überdeckten Quadrats. Dieser Prozess kann beliebig fortgeführt werden.

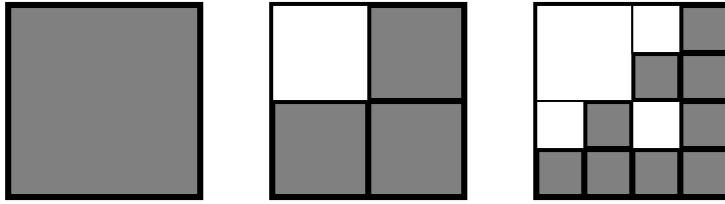
Als Dimension D kann man den Skalierungsexponenten im Prozess der Selbstähnlichkeit bezeichnen.

So ist beim selbstähnlichen Prozess der quadratischen Teilung eines Quadrates die Dimension

$$D = -\frac{\log(M(l))}{\log(l)} = -\frac{\log 4^n}{\log(1/2)^n} = -\frac{n \log 4}{n \log(1/2)} = \frac{2 \log 2}{\log 2} = 2 \quad (11)$$

im Fall der ausgefüllten Quadrate wie zu erwarten gleich zwei: $D = 2$.

Ist die Fläche in selbstähnlicher Weise jedoch nicht vollständig ausgefüllt, so ergibt sich eine nicht - ganzzahlige Dimension, wie das Beispiel des diskreten *Sierpinski – Dreiecks* wie Mandelbrot 1987 zeigt (vgl. hierzu auch die Arbeit von Sierpinsky (1974), Toffoli et al. (1987) und einige Anwendungen bei Plath (1999)):



Kantenlängen: $l = 1$ $l = 1/2$ $l = 1/3$

| n | l | $M(l)$ |
|-----|---------------|-----------|
| 0 | $l = (1/2)^0$ | $1 = 3^0$ |
| 1 | $l = (1/2)^1$ | $3 = 3^1$ |
| 2 | $l = (1/2)^2$ | $9 = 3^2$ |

$M(l)$ ist die Anzahl der schwarz gefüllten Quadrate der Kantenlänge l

Abbildung. 20 Selbstähnlicher Zerlegungsprozess eines nicht vollständig „schwarz“ überdeckten Quadrats. Dieser Prozess kann beliebig fortgeführt werden.

Die beiden ersten quadratischen Figuren mit $l = 1$ und $l = 1/2$ stellen ein *Erzeugendensystem* für den fraktalen Zerlegungsprozess dar.

Aus der Tabelle der Abb. 20 erkennt man, dass für dieses Fraktal sich die Dimension $D = 1,58..$ ergibt:

$$D = -\frac{\log(M(l))}{\log(l)} = -\frac{\log 3^n}{\log(1/2)^n} = -\frac{n \log 3}{n \log(1/2)} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58.. \quad (12)$$

Die nicht ganzzahlige Dimension $D = 1,58$ ist also ein Maß für die selbstähnliche Ausfüllung der Fläche. Im Fall der oben diskutierten Punktmenge der Poincaré-Abbildung ist D demnach ein Maß für die selbstähnliche Erfüllung der 1-dimensionalen Linie mit Punkten bzw. für die Punktdichte.

Im Fall eines chaotischen Systems hat der Graph der 1-dimensionalen Poincaré-Abbildung $x(N+1) = F(x(N))$ also stets eine fraktale Struktur, deren Dimension zwischen null und eins liegt. Man muss die fraktale Dimension des Attraktors aber unterscheiden von der Einbettungsdimension des Phasenraumes, in dem die Trajektorie

eingebettet ist. Im Fall der oben beschriebenen chaotischen Drei-Variablensysteme ist die Einbettungsdimension selbstverständlich $D_{\text{top}} = 3$.

5. Linguistische Anwendungen

In diesem Abschnitt können nur kurze Hinweise auf die wichtigsten Aspekte der Anwendungen gegeben werden. Es werden die Ebenen Phonetik/Phonologie (Phone-me, Silben), Morphologie/Wortbildung/Lexik (Wörter) und Syntax (Sätze) unterschieden. Zum Schluss werden Aspekte des Sprachwandels und Sprachwechsels skizziert.

5.1. Phoneme und Silben

Im Übergang von der akustischen (physikalischen) bzw. physiologischen Phonetik zur Phonologie stellt sich das Problem der Diskretisierung von Kontinua. Wie entstehen kategoriale Grenzen in einem Kontinuum (oder in einem wesentlich feiner gestuften Medium)? Man kann, bezogen auf dynamische Modelle, vier Typen unterscheiden:

- (a) Modelle, die den Übergang vom Chaos zur Periodizität beschreiben. So untersuchen Mende, Herzel und Wernike (1990) die Schreie von Neugeborenen und stellen dabei Übergänge fest zwischen periodischen Segmenten (im Frequenzbereich von 500 Hz; d.h. ähnlich dem Grundvokal [a]), Periodenverdoppelungen, die ein niedrigdimensionales Chaos erzeugen und Turbulenzen, die ein hochdimensionales Chaos erzeugen. Diese sind den späteren Frikativen vergleichbar. Die Grundeinteilung der Laute in Vokale, Konsonanten und Übergangsstrukturen ist damit als Ausgangspunkt der Phonation bereits von Anfang an gegeben.
- (b) In der auditiven Wahrnehmung von Sprachlauten sind bereits bei Säuglingen kategoriale Grenzen nachweisbar; d.h. nicht-lineare Reaktionen z.B. auf eine kontinuierliche Steigerung des VOT (Voice-Onset-Time). Viele phonologische

Kontraste können auf diese Weise als bereits vor dem Spracherwerb auditiv verfügbar nachgewiesen werden (vgl. Behnke 1998). Lokal sind solche nicht-linearen Grenzen Katastrophenlinien in einem Kontinuum. Mit der Anwendung der Katastrophentheorie in diesem Feld hat Petitot-Cocorda (1985) begonnen. Er zeigte u.a., dass die Vokalsysteme verschiedener Sprachen das durch die beiden ersten Formanten aufgespannte Feld in topologisch und dynamisch vorhersehbarer Weise aufspalten (ibidem, 292 ff.). Inzwischen sind Lernalgorithmen entwickelt worden, welche den Erwerb phonologischer Kategorien simulieren. Das System MAPCAT (vgl. Behnke 1998, 60-67) geht aber bereits von der Existenz einer feinen Einteilung kategorialer Grenzen aus, die dann durch eine funktionale Löschung die einzelsprachlich relevante Kategorienlandschaft ergibt; es setzt also die in Petitot-Cocorda (1985) beschriebene Entfaltung voraus.

- (c) Eine radikal dynamische Sicht der Phonologie entwickeln Browman und Goldstein (1995, 177): „Crucial to this approach is identification of phonological units with dynamically specified units of articulatory action, called *gestures*.“ Entsprechend sind die dynamischen Modelle mit den aus der Psychomotorik stammenden von Haken, Kelso, Turvey u.a. (vgl. Kelso, 1997) zu vergleichen und passen in den synergetischen Theorierahmen (vgl. Haken, 1977).
- (d) Die Emergenz phonologischer Strukturen wird auch von Lindblom/MacNeillage/Studdert-Kennedy (1984) als Selbstorganisationsprozess beschrieben, dabei werden Optimalitätskriterien beim Sprecher (sensorische Unterscheidbarkeit, weniger extreme Artikulation) und beim Hörer (perzeptuelle Distanz, perzeptuelles Hervortreten; salience) in ein Fließgleichgewicht gebracht. Daraus entstehen dann Silbenstrukturen (etwa: ba, du, bae, be, da, gu, dae, bi usw.) und im Endeffekt, ein System von Phonemen, die in diesen Silben distinktiv sind. Generell gilt, dass für alle Bereiche der Linguistik im Übergang zu naturwissenschaftlich analysierbaren, d.h. messbaren Phäno-

menen, die Frage der Entstehung der (relativ groben) Kategorisierungen in der Sprache, thematisiert werden muss, so dass automatisch auf das Modellbildungsinventar der Theorie dynamischer Systeme verwiesen ist.

5.2. Wörter

Die Struktur von Wörtern wird in der Morphologie, der Wortbildung und der lexikalischen Semantik thematisiert. Generell sind Wörter (und Sätze) eine häufige Strukturebene sprachlicher Organisation (ihre Universalität ist umstritten). Wenn es eine Wortebene gibt, ist diese in einem „Regelkreis“ eingeschlossen, der die Wortlänge, die Worthäufigkeit, die Bedeutungskomplexität und die Kontextualität umfasst. So ist z. B. klar, dass kurze (und häufige) Wörter eine größere Vielfalt von Bedeutungen im Kontext haben. Jedes Lexikon einer Sprache muss diese Größen in ein Gleichgewicht bringen, wobei die jeweils gefundene Lösung historisch veränderlich ist (selbst wenn die zugrunde liegenden Gestaltungskräfte und Bedürfnisse gleich bleiben). Köhler (1986) hat diese Konzeption für die quantitative Linguistik ausgearbeitet (vgl. den Artikel in diesem Handbuch). Die jeweilig erreichten Gleichgewichte sind Attraktoren des Systems (vgl. auch Leopold 1998).

Die Struktur eines Wortes ist phonologisch durch Betonung und Akzent, inhaltlich/grammatisch durch die Trennung von Stamm-Morphem und Affixen (bei agglutinierenden und flektierenden Sprachen) geprägt, es kommen aber auch Spaltungen des Stamms durch Infixe oder Modifikationen, z.B. Anpassungen des vokalischen Kerns vor (im Ablaut und Umlaut des Deutschen oder in der Vokalharmonie des Türkischen). Das Wort ist somit eine dynamische Einheit, die ein Gleichgewicht und eine differenzierte Verteilung verschiedener Funktionen leisten muss. So sichert der Stamm eher eine inhaltlich/imaginale/referentielle Stabilität, die Affixe situieren das Wortvorkommnis (token) in einem grammatischen Funktionsraum (oft in Abhängigkeit vom Kontext). Jede Sprache muss somit im oben skizzierten Rahmen Formtypen für Wörter, die einen Inhalt oder eine/mehrere grammatische Funktionen kodieren, bereit-

stellen. Die morphologischen Formeninventare sind eher einzelsprachlich als universal und von (historischen) Grammatikalisierungsprozessen abhängig. Eine informelle Darstellung der Dynamik in der Morphologie enthält Anttila (1985), Mayerthaler (1987) benützt die Katastrophentheorie im Rahmen einer "natürlichen" Morphologie und in Wildgen (1999a, Kap. 4) werden morphologische Prozesse im dynamischen Paradigma zusammenfassend behandelt.

In der lexikalischen Semantik besteht das dynamische Grundproblem darin, entweder einen sehr differenzierten sensorischen oder motorischen Bereich (siehe die Farbadjektive und die Verben der Bewegung) in eine möglichst kleine Anzahl von Grundschemata abzubilden (etwa die einfachen Farbadjektive oder Bewegungsverben) und in Konstruktionstypen die Mitspieler, Umstände, Aspekte, Modi usw. zu kodieren. Die jeweilige Distribution, z.B. der Momente eines Handlungsszenarios auf Verb, Nominalphrase, Adverbiale usw., ist von Sprache zu Sprache verschieden. Die Anwendung der Katastrophentheorie auf die lexikalische Semantik wurde bereits in Wildgen (1981) skizziert; weitere Aspekte der lexikalischen Semantik werden in Wildgen (1994, Kap. 3 und 4) und Wildgen (1999a, Kap. 3 und 4) behandelt. Insbesondere lexikalische Ambiguität, Polyseme und die Vagheit erfordern eine dynamische Modellbildung, bei der das Kontinuum der imaginalen und prozessual/funktionalen Bedeutungen mit der diskreten Gliederung des lexikalischen Feldes korreliert wird (vgl. Wildgen, 1983a, 1995 und 1999b).

Die morphologischen Kategorien, wie Kasus, Genus, Numerus, Person, Tempus, Modus u.a., sind ebenfalls kategoriale Unterteilungen von kontinuierlichen Skalen oder (mehrdimensionalen) Feldern; dasselbe gilt für die Wortarten. Nimmt man eine Skala der Grammatikalisierung bezüglich eines allgemeineren Merkmals, wie Kasusrollenmarkierung oder „Nouniness“, so bewegen sich einzelne Sprachen auf dieser Skala. Die jeweilige Position (eine Sprache kann mehrere Positionen realisieren) ist ein Ausschnitt der Skala, die Zwischenphasen sind synchron nicht realisiert. Dadurch

manifestiert sich in der synchronen Situation eine fraktale Struktur, da in jeder Sprache Teilstücke der Skalenlinie (wie in einer Cantor-Menge) realisiert werden; die Skala hat also eine Dimension (d) zwischen dem Punkt und der Linie, z.B. $d = 1,5$ (vgl. zu Anwendungen der Fraktale in der Semantik Wildgen 1998, 616-618).

Die Grammatikalisierung kann wegen der Mehrfachlösungen, die synchron und phasenverschoben auftreten, ein Lotka-Volterra-Modell oder Beute-Jäger-Modell benutzen. Die Beute ist der ständig sich erweiternde Wortschatz der offenen Klassen, die Jäger sind die Grammatikalisierungsprozesse, welche aus dem Material der Lexeme, Elemente der funktionsbetonten geschlossenen Klassen machen (vgl. Wildgen, 1990, 423-425).

5.3. Sätze

Die lexikalischen Valenzen von Verben, Substantiven und Präpositionen bilden die semantische Basis für syntaktische Konstruktionen, ohne diese aber schon ganz festzulegen. Es müssen Reihenfolgen in Satz und in der Nominalphrase, Thema/Rhema-Distributionen (z.B. bei der Festlegung der Subjektsfunktion), Konstituentenhierarchien (flache oder tiefe) einzelsprachlich festgelegt werden; anaphorische und kataphorische Prozesse steuern außerdem die Auswahl und Realisierung von Pronomina und Determinatoren. Der Satz ist somit ein Feld, in dem verschiedene Organisationsprinzipien mit jeweils eigenen Attraktoren (optimalen Lösungen) konkurrieren und in ein Gleichgewicht gebracht werden müssen. So sind etwa finites Verb und Subjekt- oder Thema-Konstituente zwei Attraktoren, die im Satz ins Gleichgewicht kommen. Pronominale Ketten (inklusive Null-Realisierungen oder Spuren) erzeugen eine phrasen- und satzübergreifende Struktur zusammen mit lexikalischen Feldziehungen, die Kontinuitätslinien schaffen (sogenannte Isotopien). Die dynamische Struktur des Satzes hat somit mehrere Ebenen: erstens die Ebene lexikalischer Valenzen, auf der insbesondere ikonische Beziehungen zwischen dem Situationstyp (scene, frame) und dem Valenzschema des Satzes oder der Nominalphrase eine Rolle spielen. Diese Ebe-

ne wird in der katastrophentheoretischen Semantik (siehe Art. Nr. 49) behandelt; zweitens die Topologie und Dynamik in der Reihenfolge der Konstituenten, womit die Valenzbeziehungen reorganisiert werden. Diese Ebene wird wesentlich durch die Dynamik der Informationsdistribution in der Rede-(Schreib-)Zeit bestimmt. Eine dritte Ebene bezieht den Diskurs und den dort organisierten Redewechsel mit ein; die Textlinguistik und die Konversationsanalyse werden durch diese Interaktionsdynamik bestimmt. Ein katastrophentheoretisches Modell des Redewechsels wurde in Wildgen (1983c) vorgeschlagen (vgl. als Zusammenfassung vieler Teilergebnisse Wildgen, 1999a: Kap. 6). Semio-narrative Strukturen (im Sinne von Greimas) werden in Petitot-Cocorda (1992, Kap. 7) katastrophentheoretisch behandelt und Brandt (1994, 1995) bearbeitet verschiedene Probleme der Semiotik (Modalität, Temporalität, Metapher u.a.) in einem katastrophentheoretischen Rahmen.

5.4. Prozesse des Sprachwandels

Beim Sprachwandel ist besonders deutlich, dass keine (bewusste) Regelanwendung, sondern quasi ein naturwüchsiger Prozess vorliegt, den die Populationen eher erleiden als gestalten. Gleichzeitig ist er auch das Produkt einer in Zeit und Raum verteilten Kausalität, wobei einer Vielfalt von Ursachen ein einfaches, kategoriales Veränderungsmuster entspricht. Standardbeispiele sind die germanische und althochdeutsche Lautverschiebung, die zuerst Jakob Grimm benannt hat, die große Vokalverschiebung im Englischen und der von Labov (1994) untersuchte „Northern City Vowel Shift“ im Nordosten der USA.

Die Verzweigungen in der Entwicklung des langen [a] vom Urgermanischen bis zum Neuhochdeutschen und die große Vokalverschiebung des Englischen wurden in Wildgen und Mottron (1987, 100) als Bifurkationsdynamik modelliert; Cooper (1999) verweist auf den fraktalen Charakter des Lautwandels und benützt die Elementarkatastrophen „Kuspe“ und „Schmetterling“ zur Analyse der Entwicklung des Modus-Systems seit dem Althochdeutschen. Das fraktale Ergebnis von Prozessen des

Sprachwandels kann schon bei einer ersten Inspektion genügend feinmaschiger Sprachatlanten beobachtet werden (vgl. Wildgen, 1983b, 263-266 anhand des Deutschen Sprachatlas, Tafel 36 und des Deutschen Wortatlas, Bd. V, „Ameise“).

Eine der ausführlichsten empirischen Studien zum Sprachwandel „in progress“ ist der Doppelband Labov, 1994 und 2001. Das Gesamtbild, das hier nicht zusammengefasst werden kann, zeigt eine ganze Reihe von Nicht-Linearitäten auf, die so von der traditionellen Sprachwandelforschung nicht erkannt worden waren:

- Während der Lautwandel (in engen phonetischen Grenzen) relativ kontinuierlich verläuft, ist der Wandel in den Wortformen eher diskontinuierlich. Dies wird besonders deutlich, wenn durch phonetischen Wandel Bedeutungsunterscheidungen (plötzlich) verschwinden (beim sog. „merger“). Dehnt sich die Einflusszone des phonetischen Wandels aus, kommt es automatisch zur Veränderung oder zum Verlust grammatischer und lexikalischer Bedeutungen, d.h. zu sprunghaften Veränderungen.
- Die Agenten des Sprachwandels (Innovatoren) sind nicht gleichmäßig über die soziale Skala verteilt; es liegt vielmehr eine kurvilineare Verteilung vor, bei der die obere Unterschicht und untere Mittelschicht (d.h. die besonders bewegliche mittlere Zone der sozialen Skala) das Zentrum des Innovationsprozesses darstellen.
- Anpassung ist nicht die zentrale Kraft des Sprachwandels; gerade der soziale Nonkonformismus (im Bereich der Innovatoren) ist entscheidend.
- Die Geschlechter reagieren verschieden auf explizite oder implizite Zielnormen. Während die weiblichen Sprecher eher explizite Innovationsziele wahrnehmen und darauf reagieren, werden männliche Sprecher stärker durch implizite Gebrauchsnormen und deren Veränderung beeinflusst.

Die Analyseresultate von Labov (1994, 2001) zeigen, dass der Sprachwandel in seiner internen und externen Verursachung durch Nicht-Linearitäten geprägt wird und des-

halb eine nicht-lineare dynamische Modellbildung erfordert. Explizite *Modelle*, die anhand quantitativer Daten die Sprachentwicklung simulieren, setzen aber eine Grammatiktheorie (z.B. mit Parametern für den Wandel) und einen Lernalgorithmus voraus. Auf diese Weise könnten dann Prozesse des Sprachwandels als dynamische Systeme rechnerisch simuliert werden. Bisher liegen dazu erst sehr vorläufige Ansätze vor.

5.5. Weitere Anwendungen

Der ganze Bereich der Neurolinguistik bietet sich als Anwendungsfeld an, ist aber so weitläufig, dass er hier nicht zusammengefasst werden kann. In der Sozialpsychologie der Sprache gibt es Anwendungen der Katastrophentheorie, z. B. zur Beschreibung des Einstellungswechsels (cf. Ball/Giles/Hewstone 1985). Phänomene des Sprachwechsels (oder gar des Sprachtodes) hängen eng mit Veränderungen der Werte und Einschätzungen zusammen. Der nichtlineare Charakter des Sprachwechsels wurde anhand der Verdrängung des Niederdeutschen in Bremen in Wildgen (1986) dynamisch modelliert. Dabei wurde auch gezeigt, dass sich katastrophentheoretische und synergetische Modelle ergänzen können.

6. Schluss

Die Begriffe und Modellbildungspotentiale der Katastrophen- und der Chaostheorie sind in der quantitativen und mathematischen Linguistik bisher kaum ausgeschöpft worden. Grund mag die Fremdheit dieser Begriffsbildung für eine Tradition, die Modellbildungsversuche eher in Begriffen der Logik oder der Algebra favorisiert hat. Im speziellen Fall der Synergetik (der in diesem Artikel ausgeklammert blieb) sind auch Verbindungen mit stochastischen Modellen erfolgversprechend, so dass Untersuchungsmethoden der statistischen Linguistik direkt eingebracht werden können. Generell fehlen noch geeignete exakte Beobachtungs- und Messverfahren, um präzisere Anwendungen der Katastrophen- und Chaostheorie zu ermöglichen. Viele der skiz-

zierten Anwendungen bleiben deshalb im Qualitativen. Dennoch sind sie notwendig zur konzeptuellen Vorbereitung spezifischer quantitativer Modelle.

Literatur (in Auswahl)

- Anttila, R. (1985), Dynamics in Morphology. In: *Acta Linguistica Academiae Scientiarum Hungaricae* 35 (1-2), 3-30.
- Arnold, V. I. (1986), *Catastrophe Theory*. Berlin: Springer.
- Ball, P., H. Gils und M. Hewstone (1985), Interpersonal Accomodation and Situational Construals: An Integrative Formalisation. In: *Advances in Language, Communication, and Social Psychology*. Shaftesbury, 263-286.
- Brandt, Per Aage (1994), *Dynamique du sens. Etudes de sémiotique modale*. Aarhus: Aarhus University Press.
- Brandt, Per Aage (1995), *Morphologies of Meaning*. Aarhus: Aarhus University Press.
- Browman, Catherine und Lois Goldstein (1995), Dynamics and Articulatory Phonology. In: Port/van Gelder 1995, 175-193.
- Behnke, Kay (1998), *The Acquisition of Phonetic Categories in Young Infants: A Self-Organizing Artificial Neural Network Approach*. Dissertation, MPI series in Psycholinguistics, Bd. 5. Wageningen: Ponsen/Looijen.
- Cantor, G. (1883), Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V. In: *Mathematische Annalen* 21, 545 – 591.
- Cooper, David L. (1999), *Linguistic Attractors: The Cognitive Dynamics of Language Acquisition and Change*. Amsterdam: Benjamins.
- Ebeling, W., R. Feistel (1982), *Physik der Selbstorganisation und Evolution*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Gilmore, R. (1980), *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. New York: Wiley.
- Haken, Hermann (1977), *Synergetics. An Introduction*. Berlin: Springer.
- Kelso, J. A. Scott (1997), *Dynamic Patterns. The Self-Organization of Brain and Behavior*. Cambridge (Mass.): Bradford.

- Köhler, Reinhart (1986), *Zur linguistischen Synergetik: Struktur und Dynamik der Lexik*. Bochum: Brockmeyer.
- Labov, William (1994), *Principles of Linguistic Change*, Bd. 1: Internal Factors. Oxford: Blackwell.
- Labov, William (2001), *Principles of linguistic change*. Bd. 2: Social factors. Cambridge MA: Blackwell.
- Leopold, Edda (1998), *Stochastische Modellierung lexikalischer Evolutionsprozesse*. Hamburg: Kovac.
- Lindblom, B., P. MacNeillage und M. Studdert-Kennedy (1984), Self-Organizing Process and the Explanation of Phonological Universals. In: *Explanations for Language Universals* (Hrsg. B. Butterworth /B. Cowrie /O. Dahl). Berlin: Mouton, 191-203.
- Lorenz, E.N. (1963), Deterministic non-periodic flow. In: *J. Atmos. Sci.* 20, 130.
- Lotka, A (1910), Zur Theorie periodischer Reaktionen. In: *Z. phys. Chemie* 72, 508 – 511.
- Mandelbrot, B.B. (1987), *Die fraktale Geometrie der Natur*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Mayerthaler, Willi (1987), System-independent Morphological Naturalness. In: *Leitmotifs in Natual Morphology* (Hrsg. W.V. Dressler/ W. Mayerthaler / O. Panagl / W.V. Wurzel). Amsterdam: Benjamins, 25-58.
- Mende, W., H. Herzel und K. Wernike (1990), Bifurcations and Chaos in Newborn Infant Cries, Papier. Berlin: Humboldt Universität.
- Müller, F. (1972), Fortschritt der Wissenschaft – mathematisch modelliert. In: *Wissenschaft und Fortschritt* 22 (4), 162 – 165.
- Peitgen, H.-O., H. Jürgens, D. Saupe (1992), *Fractals for the Classroom*, Band 1. New York: Springer-Verlag.

- Peschel, M. und W. Mende (1983), *Leben wir in einer Volterra Welt?* In: (Reihe: Mathematische Forschung, Bd. 14). Berlin: Akademie-Verlag.
- Petitot-Cocorda, Jean (1985), *Les catastrophes de la parole*. De R. Jakobson à René Thom. Paris: Maloine.
- Petitot-Cocorda, Jean (1992), *Physique du Sens*. De la théorie des singularités aux structures sémio-narratives. Paris: Editions du CNRS.
- Petitot, Jean (2004). *Morphogenesis of Meaning*. Bern: Lang.
- Plath, Peter J. (1989), Modelling of Heterogeneously Catalyzed Reactions by Cellular Automata of Dimension Between One and Two , In: *Optimal Structures in Heterogeneous Reaction Systems*. (Hrsg. P.J. Plath), Springer Series in Synergetics, Bd. 44 , 1 - 25
- Poincaré, Henri (1892), *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Paris: Gautier-Villar (In englischer Sprache: N.A.S.A. Translation TT F-450/452 U.S. Fed. Clearinghouse, Springfield, VA USA, 1967)
- Port, R.F./T. van Gelder (Hrsg.) (1995), *Mind as Motion. Explorations in the Dynamics of Cognition*. Cambridge (Mass.): Bradford/MIT Press.
- Schuster, H.G. (1984), *Deterministic Chaos*. Weinheim: Physik Verlag.
- Sierpinski, W. (1974), *Oeuvres choisies* (Hrsg. S. Hartman et. al.).Warschau: PWN .
- Rössler, O.E. (1979), Continuous chaos – four prototype equations. In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 316, 376 – 392.
- Thom, René (1977), *Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles* (2. veränderte Auflage, Interéditions, Paris, 1977; englische Übersetzung der ersten Auflage mit Kürzungen, 1975; erste französische Auflage 1972).
- Thom, René (1983), *Mathematical Models of Morphogenesis*. Chichester: Horwood.

- Toffoli, Tommaso und Margolus, Norman (1987), *Cellular automata Machines – A New Environment for Modeling*, Cambridge Mass.und London: The MIT Press.
- Volterra, V. (1931), *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris: Gautier-Villars.
- Wildgen, Wolfgang (1981), Archetypal Dynamics in Word Semantics. An Application of Catastrophe Theory. In: *Words, Worlds and Context. New Approaches to Word Semantics* (Hrsg. H. J. Eikmeyer/H. Rieser. Berlin: de Gruyter, 234-296.
- Wildgen, Wolfgang (1982), *Catastrophe Theoretic Semantics. An Elaboration and Application of Rene Thom's Theory*. Amsterdam: Benjamins.
- Wildgen, Wolfgang (1983a), Modelling Vagueness in Catastrophe Theoretic Semantics. In: *Approaching Vagueness* (Hrsg. T. Ballmer/M. Pinkal. Amsterdam: North-Holland, 317-360.
- Wildgen, Wolfgang (1983b). Goethe als Wegbereiter einer universalen Morphologie (mit besonderer Berücksichtigung der Sprachform). In: *Goethes Bedeutung für das Verständnis der Naturwissenschaften heute* (Hrsg. Wolff, K.D, Reihe: Jahresbericht der Universität Bayreuth, 1982). Bayreuth: Universitätsverlag, 235-277.
- Wildgen, Wolfgang (1983c). Dialogdynamik. Erste Ansätze zu einer Erfassung der Dynamik verbaler Interaktionen am Beispiel richterlicher Anhörungen. In: *Papiere zur Linguistik* 29 (2), 3-21.
- Wildgen, Wolfgang (1985), *Archetypensemantik. Grundlagen für eine dynamische Semantik auf der Basis der Katastrophentheorie*. Tübingen: Narr.
- Wildgen, Wolfgang (1986), Synergetische Modelle in der Soziolinguistik. Zur Dynamik des Sprachwechsels Niederdeutsch-Hochdeutsch in Bremen um die Jahrhundertwende (1880-1920). In: *Zeitschrift für Sprachwissenschaft* 5 (1), 105-137.

- Wildgen, Wolfgang (1990), Basic Principles of Self-Organization in Language. In: *Synergetics of Cognition. Proceedings of the International Symposium at Schloss Elmau* (Hrsg. Haken, H. / M. Stadler). Berlin: Springer, 415-426.
- Wildgen, Wolfgang (1994), *Process, Image and Meaning. A Process and Image Centred Model of the Meaning of Sentences and Narrative Texts*. Amsterdam: Benjamins.
- Wildgen, Wolfgang (1995), Semantic Ambiguity in Relation to Perceptual Multistability. In: *Ambiguity in Mind and Nature* (Hrsg. M. Stadler / Peter Kruse). Berlin: Springer, 221-240.
- Wildgen, Wolfgang (1998), Chaos, Fractals and Dissipative Structures in Language or the End of Linguistic Structuralism. In: *Systems: New Paradigms for the Human Sciences* (Hrsg. W. Koch / G. Altmann). De Berlin: Gruyter, 596-620.
- Wildgen, Wolfgang (1999a). *De la grammaire au discours. Une approche morphodynamique* (Reihe: Sémiotique européenne, Nr. 1). Bern: Lang Verlag.
- Wildgen, Wolfgang (1999b). *Hand und Auge. Eine Studie zur Repräsentation und Selbstrepräsentation (kognitive und semantische Aspekte)* (Schriftenreihe des Zentrums Philosophische Grundlagen der Wissenschaften, Bd. 21). Bremen: Universitätsverlag.
- Wildgen, Wolfgang (2004) *The Evolution of Human Language. Scenarios, Principles, and Cultural Dynamics*. Amsterdam: Benjamins.
- Wildgen, W. et L. Mottron (1987), *Dynamische Sprachtheorie: Sprachbeschreibung und Spracherklärung nach den Prinzipien der Selbstorganisation und der Morphogenese*. Bochum: Studienverlag Brockmeyer.
- Woodcock, Alexander und Monte Davis (1991), *Catastrophe Theory. A Revolutionary Way of Understanding How Things Change*. London: Penguin Books (Erstauflage 1978).

