Maximierung des Gewinns als Beispiel für eine absolute Kennzahl

Wir nehmen die folgende Formel für den Gewinn G

$$G = U - K \tag{1}$$

mit U als Umsatz und K als Kosten. Spezifizieren wir den Umsatz und die Kosten noch näher.

$$U = PX \tag{2}$$

mit X als Menge eines Produktionsgutes und P als Preis dieses verkauften Gutes. Wenn wir die Kosten K als Kostenfunktion des Produktionsgutes ansetzen, erhalten wir die folgende Gleichung für den Gewinn.

$$G = PX - K(X) \tag{3}$$

Wenn wir den Gewinn maximieren wollen, müssen wir die 1. Ableitung von (3) nach der produzierten Menge X bilden und erhalten

$$\frac{dG}{dX} = P - \dot{K}(X) \tag{4}$$

Setzen wir nun (4) gleich Null so erhalten wir

$$P = \dot{K}(X) \tag{5}$$

Der Gewinn wird also maximal, wenn (5) erfüllt ist und wenn die 2. Ableitung von (3) nach der produzierten Menge X

$$\frac{d^2G}{dX^2} = -\ddot{K}(X) \tag{6}$$

kleiner ist als Null. Daraus folgt also dass $\ddot{K}(X) > 0$ sein muss.

$\Rightarrow$

Um einen maximalen Gewinn zu erzielen, müssen also die Preise für die produzierten Güter mit den Kostenänderungen, die notwendig für die Produktion der Güter sind, korrelieren, wenn es es sich um steigende Grenzkosten handelt.

Maximierung der Profitrate als Beispiel für eine relative Kennzahl

Für die Profitrate R setzen wir die Formel

$$R = \frac{G}{K} \tag{7}$$

an, wie bei der Gewinnmaximierung mit G als Gewinn und K als Kosten. Wenn wir Gewinn und Kosten wie bei der Gewinnmaximierung ausformulieren erhalten wir

$$R = \frac{PX - K(X)}{K(X)} \tag{8}$$

Nun bilden wir auch von (8) unter Anwendung der Quotientenregel[1] die erste Ableitung.

$$\frac{dR}{dX} = \frac{(P - \dot{K}(X))K(X) - \dot{K}(X)(PX - K(X))}{K(X)^2} \tag{9}$$

und setzen diese gleich Null, da wir ja das Maximum von (8) errechnen wollen. Wenn wir den Zähler von (9) ausmultiplizieren erhalten wir

$$0 = \frac{PK(X) - \dot{K}(X)K(X) - \dot{K}(X)PX + \dot{K}(X)K(X)}{K(X)^2} \tag{10}$$

Der Term $-\dot{K}(X)K(X) + \dot{K}(X)K(X)$ wird zu Null. Daher erhalten wir

$$0 = \frac{PK(X) - \dot{K}(X)PX}{K(X)^2} \tag{11}$$

Damit (11) erfüllt ist, muss gelten

$$0 = PK(X) - \dot{K}(X)PX \tag{12}$$

und damit

$$\frac{K(X)}{X} = \dot{K}(X) \tag{13}$$

Auf der linken Seite von (13) erhalten wir die Durchschnittskosten, wenn wir diese minimieren, müssen wir wie gehabt die 1. Ableitung bilden. Dies tun wir wiederum unter Anwendung der Quotientenregel und erhalten.

[1]Die erste Ableitung von $\frac{u}{v}$ ist gleich $\frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2}$

$$\frac{d\frac{K(X)}{X}}{dX} = \frac{\dot{K}(X)X - K(X)}{X^2} \tag{14}$$

Setzen wir (14) gleich Null und stellen um erhalten wir

$$\dot{K}(X) = \frac{K(X)}{X} \tag{15}$$

also gleich (13). Die Durchschnittskosten werden also minimal, wenn (15) gilt. Das ist aber gleichzeitig auch die Bedingung für eine maximale Profitrate (vergleiche (13)). Auch im Fall der maximalen Profitrate handelt es sich um steigende Grenzkosten, wie bei der Maximierung des Gewinns. Das können Sie reltiv leicht nachvollziehen, in dem Sie die 1. Ableitung von (11) bilden und validieren, wann diese kleiner als Null wird.

$\Rightarrow$

Das Maximum der Profitrate liegt also im Minimum der Durchschnittskosten[2]. Der Preis spielt also, wie noch bei der Gewinnmaximierung der Fall, keine Rolle mehr.

[2] Die oben durchgeführten Betrachtungen gelten ähnlich für andere relative Kennzahlen, wie die Umsatzrendite. Das können Sie gerne ähnlich wie für die Profitrate nachvollziehen.